الجسم	مجالات التغير	M , dm	الجسيم العنصري
صفيحة مستوية • أبعادها a,b	$0 \leq x \leq a$ $0 \leq y \leq b$	$S = a\,b$ $ds = dx\,dy$ $M = \rho S = \rho\,a\,b$ $dm = \rho\,dx\,dy$	
صفيحة دائرية • نصف قطرها R	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq r \leq R$	$S = \pi R^2$ $ds = r\,dr d\varphi$ $M = \rho S = \rho\,\pi R^2$ $dm = \rho\,r\,dr\,d\varphi$	
مكعّب • طول ضلعه a	$0 \leq x \leq a$ $0 \leq y \leq a$ $0 \leq z \leq a$	$V = a^3$ $dv = dx\,dy\,dz$ $M = \rho V = \rho\,a^3$ $dm = \rho\,dx\,dy\,dz$	
اسطوانة • ارتفاعها h • نصف قطرها R	$0 \leq r \leq R$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq z \leq h$	$V = \pi R^2 h$ $dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$ $M = \rho V = \rho\,\pi R^2 h$ $dm = \rho\,r\,dr\,d\varphi\,dz$	
سطح اسطواني • ارتفاعه h • نصف قطره R	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $0 \leq z \leq h$ (R ثابت)	$S = 2\pi R h$ $ds = R\,d\varphi\,dz$ $M = \rho S = \rho\,2\pi R h$ $dm = \rho\,R\,d\varphi\,dz$	

الجسم	مجالات التغير	M , dm	الجسيم العنصري
مخروط • ارتفاعه **h** • نصف قطره **R**	**قــائم:** $\mathbf{0 \le r \le \frac{R}{h}(h-z)}$ $\mathbf{0 \le \varphi \le 2\pi}$ $\mathbf{0 \le z \le h}$ **مقلوب:** $\mathbf{0 \le r \le \frac{R}{h} z}$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $dv = r\, dr\, d\varphi\, dz$ $M = \rho V = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $dm = \rho\, r\, dr\, d\varphi\, dz$	dz r dφ dr
سطح مخروطي • ارتفاعه **h** • نصف قطره **R**	$0 \le \varphi \le 2\pi$ $0 \le z \le h$	$S = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$ $ds = \frac{2\pi R \sqrt{R^2+h^2}}{h^2}(h-z)dz$ $M = \rho \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$ $dm = \rho\, ds$	dz dℓ dr
كرة • نصف قطرها **R**	$0 \le r \le R$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ $0 \le \theta \le \pi$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ $M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ $dm = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$	Z rsin θ d φ dr Mz dφ φ M θ dθ rd θ O Y φ
سطح كروي • نصف قطره **R**	$0 \le \varphi \le 2\pi$ $0 \le \theta \le \pi$	$s = 4\pi R^2$ $ds = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ $M = \rho S = 4\rho \pi R^2$ $dm = \rho\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$	rsin θ d φ Mz dφ φ R M θ dθ rd θ O Y φ
مجسم ناقصي • **نصف قطر محوره المحرق a** • نصــــفــا قطريــه الثانويين **b,c**	$0 \le r \le 1$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ $0 \le \theta \le \pi$	$V = \frac{4}{3}\pi\, \text{abc}$ $dv = abc\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$ $M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi\, abc$ $dm = \rho\, abc\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$	

أهم القوانين	
• عزم العطالة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات :	$I_o = \int_v (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$
• عزوم العطالة بالنسبة للمحاور :	$I_x = \int_v (y^2 + z^2)\, dm$
	$I_y = \int_v (x^2 + z^2)\, dm$
	$I_z = \int_v (x^2 + y^2)\, dm$
• عزوم العطالة بالنسبة للمستويات الاحداثية :	$I_{xy} = \int_v (z^2)\, dm$
	$I_{yz} = \int_v (x^2)\, dm$
	$I_{xz} = \int_v (y^2)\, dm$
• جداءات العطالة :	$P_{xy} = \int_v xy\ dm$
	$P_{yz} = \int_v yz\ dm$
	$P_{xz} = \int_v xz\ dm$
• احداثيات مركز الكتل : $G(X_G . Y_G . Z_G)$	$X_G = \frac{\int_v x\ dv}{v}$
	$Y_G = \frac{\int_v y\, dv}{v}$
	$Z_G = \frac{\int_v z\ dv}{v}$
• نظرية هويجنز الأولى : (تربط بين عزوم العطالة بالنسبة للجملة الأساسية وعزوم العطالة بالنسبة لجملة مركز الكتل)	$I_O = I_G + M\,(d_1)^2$ البعد بين المبدأ O والمركز G d_1
	$I_{OX} = I_{GX} + M\,(d_2)^2$ البعد بين المحور OX والمحور GX d_2
	$I_{OXY} = I_{GXY} + M\,(d_3)^2$ البعد بين المستوي OXY والمستوي GXY d_3
• نظرية هويجنز الثانية : (تربط بين جداءات العطالة بالنسبة للمستوي الثابت والمستوي المار من مركز الكتل G)	$P_{XY} = P_{GXY} + M\, X_G Y_G$

أهم القوانين	
• عزم العطالة بالنسبة لمحور مائل مار من مبدأ الاحداثيات : $$I_\Delta = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta P_{xy} - 2\beta\gamma P_{yz} - 2\alpha\gamma P_{xz}$$ حيث أنّ : $\alpha = \text{Cos}\,(\widehat{OX,\Delta})$, $\beta = \text{Cos}\,(\widehat{OY,\Delta})$, $\gamma = \text{Cos}\,(\widehat{OZ,\Delta})$	
• محور التناظر الديناميكي :	يكون OX محور تناظر ديناميكي اذا تحقق : $I_{OY} = I_{OZ}$
• المحور الأساسي للعطالة :	نقول عن المحور OX أنه محور أساسي للعطالة اذا تحقق : $P_{XY} = 0$, $P_{XZ} = 0$
أهم خواص عزوم العطالة	
$I_O = I_{XY} + I_{YZ} + I_{XZ}$	$2I_O = I_X + I_Y + I_Z$
$I_X = I_{XY} + I_{XZ}$	$I_O = I_X + I_{YZ}$
$I_X - I_Y \leq I_Z$	$I_X + I_Y \geq I_Z$
التحويل بين الاحداثيات	
• ديكارتية ↔ اسطوانية :	$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$
• ديـكارتية ↔ كرويـــة :	$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

